

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
(МГСУ)**

Кафедра «Испытание сооружений»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Часть 4

«РАСЧЕТЫ НА ИЗГИБ»

для студентов факультета МиАС
(специальности 270101, 270113, 190205)

МОСКВА
2009

СОСТАВИТЕЛЬ

Проф., канд. техн. наук

И.А. Горбунов

Научный редактор

Проф., докт. техн. наук

А.В. Коргин

Рецензент

Доц. канд. техн. наук

О.Л. Бандин

(Московский

гидромелиоративный институт)

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»
Часть 4
«РАСЧЕТЫ НА ИЗГИБ»
для студентов факультета МиАС
(специальности 270101, 270113, 190205)**

Редактор Н.И. Богдасарова
Технический редактор С.М. Сивоконева

Подписано в печать	Формат	Печать офсетная
И-15	Объём	Заказ
	Тираж	

Типография

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В РАСЧЕТНАХ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ
Нормальные σ и касательные τ напряжения в поперечном сечении определяются после построения эпюр M и Q по формулам

$$\sigma_i = \frac{M_x \cdot y_i}{J_x};$$
$$\tau_i = \frac{Q_y \cdot S_i^{OTC}}{J_x \cdot b_i}, \text{ (Формула Журавского),}$$

где J_x – момент инерции;

y_i – координата y точки i в которой определяются нормальные напряжения σ_i ;

M_x, Q_y – изгибающий момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении (по эпюрам M и Q);

x, y – оси координат, проходящие через центр тяжести сечения;

b_i – ширина сечения в точке i (по прямой, параллельной оси x);

S_i^{OTC} – статический момент «отсеченной» части сечения относительно оси x ;

τ_i – касательные напряжения в точке i .

После нахождения нормальных и касательных напряжений в поперечном (\perp оси бруса) сечении могут быть определены касательные и нормальные в наклонном сечении, проходящем через точку i . Как правило, интерес представляют те наклонные сечения, в которых действуют наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения (главные напряжения) σ_{1min} , σ_{1max} и максимальные (минимальные) касательные напряжения τ_{1min} , τ_{1max} . Значения этих напряжений и угол наклона площадок, на которых они действуют, определяются графически (круг Мора) или аналитически по формулам:

$$\sigma_{i \frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_i}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{2} + \tau_i^2};$$
$$\tau_{i \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{4} + \tau_i^2};$$
$$\alpha = \frac{\arctg \left(-\frac{2\tau_i}{\sigma_i} \right)}{2};$$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Исходные данные: балка загружена по схеме (рис. 1);

$[\sigma] = 210 \text{ МПа}$ – расчетное сопротивление при изгибе;

$[\tau] = 130 \text{ МПа}$ – расчетное сопротивление на срез при изгибе

1. Определение внутренних силовых факторов

1.1. Определение опорных реакций:

$$\sum M_A = 0; \quad 70 - R_B \cdot 6 + 50 \cdot 3 + 40 \cdot 5 \cdot 2,5 - 120 \cdot 1 = 0$$

$$R_B = 100 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -120 \cdot 7 + R_A \cdot 6 + 50 \cdot 3 + 40 \cdot 5 \cdot 3,5 + 70 = 0$$

$$R_B = 270 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum Y = 0 (\uparrow); \quad 100 + 270 - 50 - 120 - 40 \cdot 5 = 0$

1.2. Построение эпюр Q и M :

I уч. $0 \leq z \leq 1; z = 0$ в т. С

$$Q = -120 \text{ кН}; \quad M = 120 \cdot z; \quad M_{z=0} = 0; \quad M_{z=1} = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

II уч. $0 \leq z \leq 3; z = 0$ в т. А

$$Q = -120 + 270 - 40z = 150 - 40z; \quad Q_{z=0} = 150 \text{ кН}; \quad Q_{z=3} = 30 \text{ кН}$$

$$M = 120(1 + z) - 270z + 40 \frac{z^2}{2}; \quad M_{z=0} = 120 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z=3} = -150 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Экстремума в M нет, т.к. $Q_{II - участка} \neq 0$

III уч. $0 \leq z \leq 2; z = 0$ в т. Е

$$Q = -100 + 40z; \quad Q_{z=0} = -100 \text{ кН}; \quad Q_{z=1} = -20 \text{ кН}$$

$$M = 70 - 100(1 + z) + 40 \frac{z^2}{2} = -30 - 100z + 20z^2;$$

Экстремума нет, т.к. $Q \neq 0; \quad M_{z=0} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{z=2} = -150 \text{ кН} \cdot \text{м}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. - Изд. 14-е, испр. - М.: МГТУ, 2007. - 591 с. : ил.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; ред. А. В. Александров. - 5-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 560 с. : ил.
3. Варданян, Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Text] / Г. С. Варданян, Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. - М.: Изд-во АСВ, 1995. - 572 с. : ил.
4. Грес, П. В. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] : учеб. пособие для техн. вузов / П. В. Грес. - Изд. 2-е, стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 135 с. : ил.
5. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Киев : Наук. думка, 1988. - 734 с. : ил.

IV уч. $0 \leq z \leq 1; z = 0$ в т. Р

$$Q_{z=0} = -100 \kappa H; M = 70 - 100z; M_{z=0} = 70 \kappa H \cdot m;$$

$$M_{z=1} = -30 \kappa H \cdot m$$

V уч. $0 \leq z \leq 1; z = 0$ в т. К

$$Q = 0; M = 70 \kappa H \cdot m$$

2. Подбор сечения

$$W = \frac{M}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3}{210} = 714 \text{ см}^3$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-79):

$$\text{I } \text{№}36 - W_x = 743 \text{ см}^3, \text{I } \text{№}33 - W_x = 597 \text{ см}^3$$

Проверка прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{133}^{\max} = \frac{M}{W} = \frac{150 \cdot 10^3}{597} = 251 \text{ МПа}$$

$$\text{Перенапряжение: } \frac{241 - 210}{210} 100 = 19,5 > 5\% \text{ — недопустимо.}$$

$$\sigma_{136}^{\max} = \frac{150 \cdot 10^3}{743} = 202 \text{ МПа}$$

Проверка прочности I №36 по касательным напряжениям:

$$\tau^{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{J_x \cdot \rho_{OTC}}; Q_{\max} = 150 \kappa H; S_x^* = 423 \text{ см}^3;$$

$$J_x = 13380 \text{ см}^4; \rho_{OTC} = d = 0,75 \text{ см};$$

$$\tau^{\max} = \frac{150 \cdot 423 \cdot 10}{13380 \cdot 0,75} = 63,2 \text{ МПа} < [130]$$

Принимаем I №36

$$* W = \frac{M}{[\sigma]} \frac{[\kappa H \cdot m]}{[\text{МПа}]}, \frac{\kappa H \cdot m \cdot m^2}{10^3 \kappa H} = \frac{10^6 \text{ см}^3}{10^3} = 10^3 \text{ см}^3; \frac{[\kappa H \cdot m]}{[\text{МПа}]} 10^3 = [\text{см}^3]$$

9. Определение угла поворота оси в т.А (рис. 5)

$$\varphi_A : \text{I уч.} \quad (M_P \cdot M_I)_1 = 0 \quad \text{V уч.} \quad (M_P \cdot M_I)_5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{II уч.} \quad (M_P \cdot M_I)_2 &= \frac{3}{6} [-2 \cdot 1 \cdot 120 + 2 \cdot 150 \cdot 0,3 + 150 \cdot 1 - 0,5 \cdot 120] + \\ &+ \frac{3}{3} \left(-\frac{40 \cdot 3^2}{8} [(-1) + (-0,5)] \right) = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III уч.} \quad (M_P \cdot M_I)_3 &= \frac{2}{6} [2 \cdot 0,5 \cdot 150 + 2 \cdot 0,167 \cdot 30 + 0,167 \cdot 150 + 0,5 \cdot 30] + \\ &+ \frac{2}{3} \left(-\frac{40 \cdot 2^2}{8} [(-0,5) + (-0,167)] \right) = 75,6 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \end{aligned}$$

$$\text{IV уч.} \quad (M_P \cdot M_I)_4 = \frac{1}{6} [2 \cdot 0,167 \cdot 30 - 70 \cdot 0,167] = -0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

$$\nu_A = \frac{\sum_{i=2}^{i=4} (M_P \cdot M_I)}{E \cdot J} = \frac{90 + 75,6 - 0,3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,34^\circ$$

Аналогичным образом получено:

$$f_k = -0,53 \text{ см}; \quad \varphi_B = 0,36^\circ$$

На рис. 6 представлен характер изогнутой оси балки (масштабы перемещений и длины балки не совпадают).

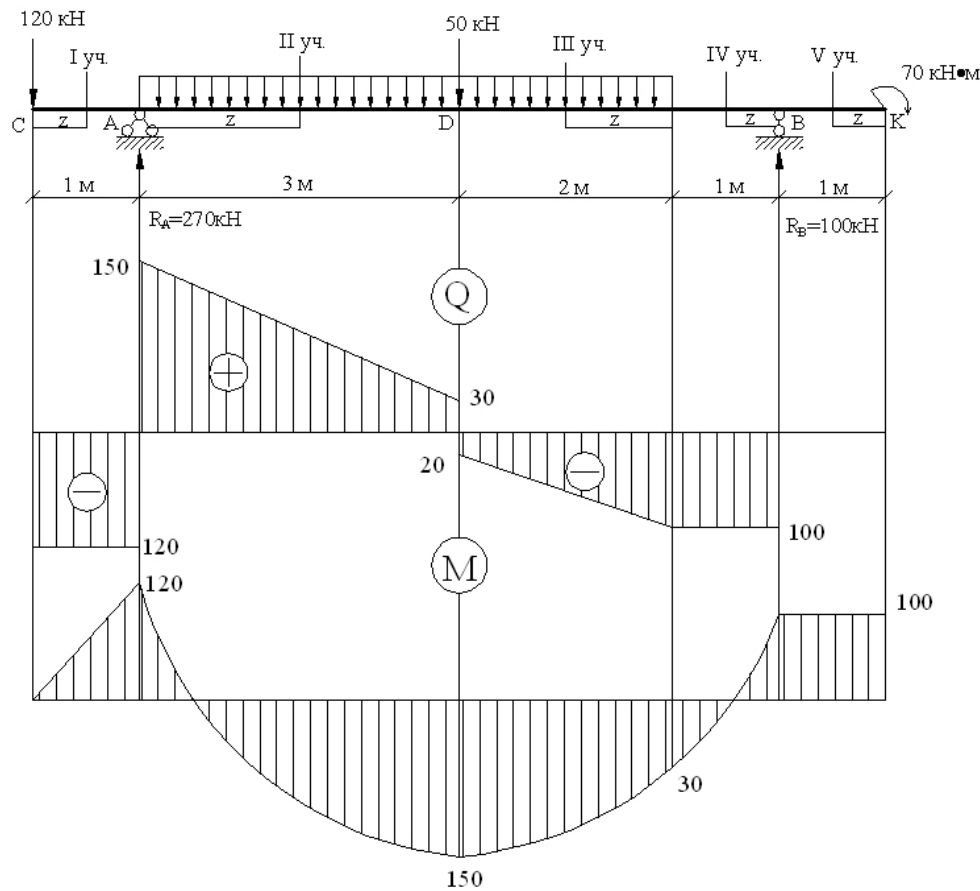


Рис. 1

$$\begin{aligned} \text{IV у.ч. } (M_P \cdot M_I)_4 &= \frac{1}{6} [2 \cdot (-0,5) \cdot (-30) + 2 \cdot 0 \cdot 70 + 70 \cdot (-0,5) + \\ &+ (-3) \cdot 0] = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\ f_D &= \frac{\sum_{i=2}^4 (M_P \cdot M_I)_i}{E \cdot J} = \frac{(202,5 + 226,7 - 0,8)}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}} = 1,52 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,52 \text{ см} \end{aligned}$$

8. Определение перемещений оси в т.С (рис. 5)

$$\begin{aligned} \text{I у.ч. } (M_P \cdot M_I)_2 &= \frac{1}{6} (2 \cdot 120 + 1) = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\ \text{II у.ч. } (M_P \cdot M_I)_2 &= \frac{3}{6} [2 \cdot 120 \cdot 1 - 2 \cdot 150 \cdot 0,5 + 120 \cdot 0,5 - 150 \cdot 1] + \\ &+ \frac{3}{3} \left(-\frac{40 \cdot 3^2}{8} [1,5 + 0,5] \right) = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\ \text{III у.ч. } (M_P \cdot M_I)_3 &= \frac{2}{6} [-2 \cdot 0,5 \cdot 150 - 2 \cdot 0,167 \cdot 30 - 0,5 \cdot 30 - 0,167 \cdot 150] + \\ &+ \frac{2}{3} \left(-\frac{40 \cdot 2^2}{8} [0,5 + 0,167] \right) = -75,6 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\ \text{IV у.ч. } (M_P \cdot M_I)_4 &= \frac{1}{6} [-2 \cdot 0,167 \cdot 30 + 167 \cdot 70] = 0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\ \text{V у.ч. } (M_P \cdot M_I)_5 &= 0 \\ f_C &= \frac{\sum_{i=2}^4 (M_P \cdot M_I)_i}{E \cdot J} = \frac{(40 - 90 - 75,6 + 0,3)}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}} = -4,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,45 \text{ см} \end{aligned}$$

3. Построение эпюры нормальных σ и касательных τ напряжений для опасного сечения балки (рис. 2) (по указанию преподавателя)

Рассмотрим сечение в т.А (рис. 1): $M = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $Q = 150 \text{ кН}$.

3.1. На эпюре σ отмечаем значение напряжений в девяти точках упрощенного сечения двутавра:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{M \cdot y_i}{J_x} [\text{МПа}]; \\ \sigma_{1,9} &= \pm \frac{M \cdot y_{\max}}{J_x} = \pm \frac{120 \cdot 10^3}{743} = \pm 161,5; \\ \sigma_{2,9;7,9} &= \pm \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 16,77}{13380} = \pm 150,4; \\ \sigma_{4,6} &= \pm \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 8,39}{13380} = \pm 75,2; \\ \sigma_5 &= 0. \end{aligned}$$

3.2. Построение эпюры τ . Указываются значения в девяти точках:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Q_{\max} \cdot S_i^{OTC}}{J_x \cdot b_i} [\text{МПа}]; \\ Q_{\max} &= 150 \text{ кН}; J_x = 13380 \text{ см}^4; \\ S_i^{OTC} &[\text{см}^3] - \text{статический момент отсеченной в } i\text{-й точке части двутавра}; \\ b_i^{OTC} &- \text{ширина двутавра в } i\text{-й точке}. \end{aligned}$$

Точки 1, 9 $\tau_{1,9} = 0$, т.к. $S_{1,9}^{OTC} = 0$;

Точки 2, 8 $S_{2,8}^{OTC} = 14,5 \cdot 1,23 \cdot (18 - 1,23/2) = 310$;

$$\tau_{2,8} = \frac{150 \cdot 310 \cdot 10}{13380 \cdot 14,5} = 2,4$$

Точки 3, 7 $S_{3,7}^{OTC} = S_{2,8}^{OTC} = 310$;

$$\tau_{3,7} = \frac{150 \cdot 310 \cdot 10}{13380 \cdot 0,75} = 46,3$$

Точки 4,6 $S_{4,5}^{OTC} = S_{2,8}^{OTC} + 8,385 \cdot 0,75(8,385 + 8,385 / 2) = 389 ;$

$$\tau_{3,7} = \frac{150 \cdot 389 \cdot 10}{13380 \cdot 0,75} = 58,1$$

Точка 5 $S_5^{OTC} = S_x^{OTC} = 423; \tau_5 = \frac{150 \cdot 423 \cdot 10}{13380 \cdot 0,75} = 63,2$

4. Построение эпюры главных напряжений и наибольших (наименьших) касательных напряжений в опасном сечении балки (рис.2.б)

4.1. Построение эпюры главных напряжений

$$\sigma_{i \frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_i}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{4} + \tau_i^2}; \text{ МПа}$$

Точка 1 $\sigma_{1 \frac{\max}{\min}} = \frac{161,5}{2} \pm \sqrt{\frac{161,5^2}{4} + 0} = 161,5; 0$

Точка 9 $\sigma_{9 \frac{\max}{\min}} = -\frac{161,5}{2} \pm \sqrt{\frac{161,5^2}{4} + 0} = 0; -161,5$

Точка 2 $\sigma_{2 \frac{\max}{\min}} = \frac{150,4}{2} \pm \sqrt{\frac{150,4^2}{4} + 2,4^2} = 150,44; -0,04.$

Точка 8 $\sigma_{8 \frac{\max}{\min}} = 0,04; -150,4.$

Точка 3 $\sigma_{3 \frac{\max}{\min}} = \frac{150,4}{2} \pm \sqrt{\frac{150,4^2}{4} + 46,3^2} = 163,5; -13,1.$

Точка 7 $\sigma_{7 \frac{\max}{\min}} = 13,1; -163,5.$

Точка 4 $\sigma_{4 \frac{\max}{\min}} = \frac{75,2}{2} \pm \sqrt{\frac{75,2^2}{4} + 58,1^2} = 106,8; -31,6.$

Точка 6 $\sigma_{6 \frac{\max}{\min}} = 31,6; -106,8.$

Точка 5 $\sigma_{5 \frac{\max}{\min}} = 0 \pm \sqrt{0 + 63,2^2} = \pm 63,2.$

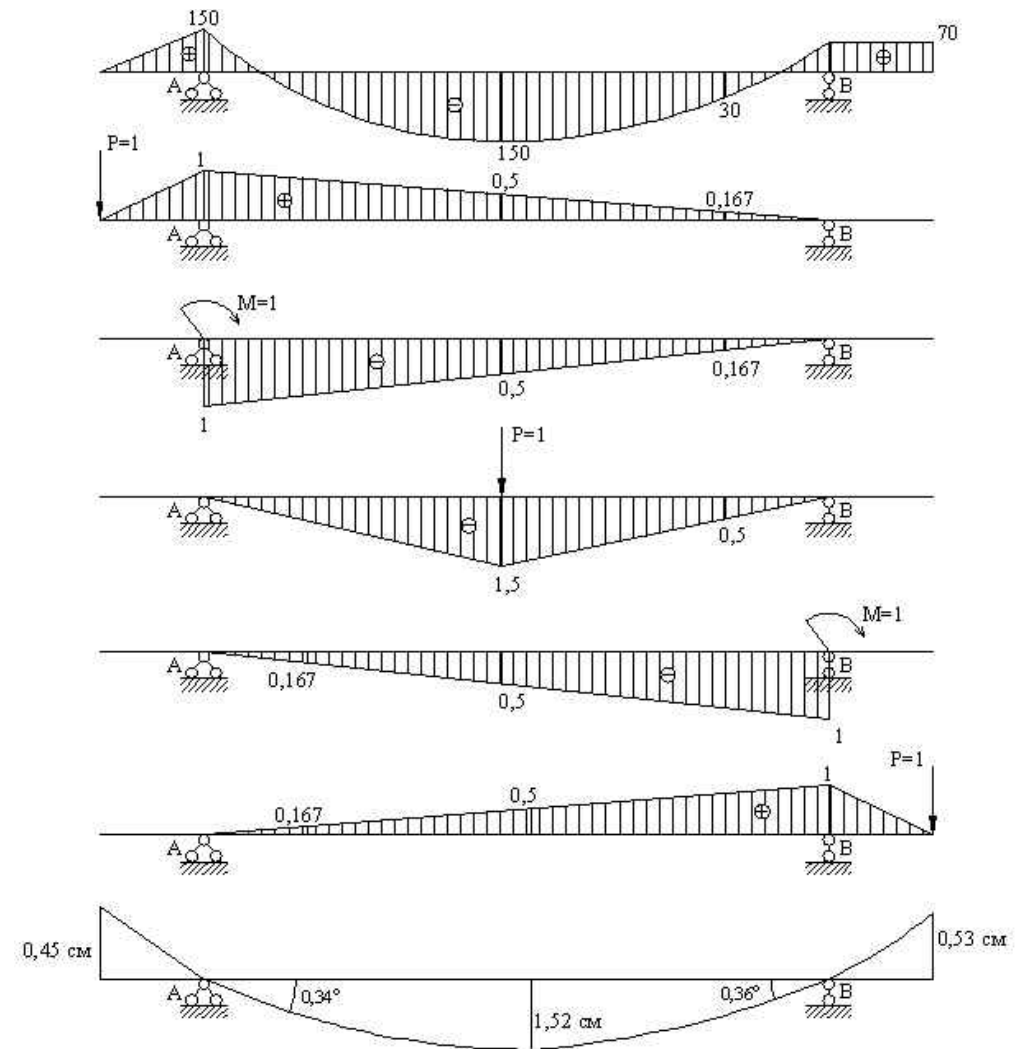


Рис. 5.

4. Вычислить перемещение, просуммировав результаты «перемножения» по участкам и разделив полученное значение на жесткость балки EJ. При перемножении эпюр на участках с линейным изменением M_p можно воспользоваться правилом «перемножения» трапеций (рис. 4);

$$(M_p \cdot M_1) = \frac{L}{6} (2 \cdot a \cdot a_1 + 2 \cdot v \cdot v_1 + a \cdot v_1 + v \cdot a_1)$$

– ординаты эпюр моментов a, v, a_1, v_1 вносятся в формулу со своими знаками.

При «перемножении» эпюр на участках с изменением M_p по закону параболы произведение $M_p \cdot M_i$ представляется как сумма результатов «перемножения» трапеции и «сегмента» на трапецию:

$$(M_p \cdot M_1) = \frac{l}{3} (2 \cdot a \cdot a_1 + 2 \cdot v \cdot v_1 + a \cdot v_1 + v \cdot a_1) + \frac{l(c)}{3} \cdot (a_1 + v_1) *$$

Для определения угла поворота оси балки методом Верещагина в балке в рассматриваемой точке прикладывается единичный безразмерный сосредоточенный момент, в дальнейшем решении сохраняется полная аналогия с задачей определения перемещений.

7. Определение перемещений оси в середине пролетной части балки т.А (рис. 5)

$f_D :$

$$\text{I уч. } (M_p \cdot M_1)_1 = 0 \quad \text{V уч. } (M_p \cdot M_1)_5 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{II уч. } (M_p \cdot M_1)_2 &= \frac{3}{6} [2 \cdot 0 \cdot 120 + 2 \cdot (-150) \cdot (-1,5) + (-150) \cdot 0 + 120 \cdot (-1,5)] + \\ &+ \frac{3}{3} \left(-\frac{40 \cdot 3^2}{8} [0 + (-1,5)] \right) = 202,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III уч. } (M_p \cdot M_1)_3 &= \frac{2}{6} [2 \cdot (-1,5) \cdot (-150) + 2 \cdot (-0,5) \cdot (-30) + (-0,5) \cdot (-150) + \\ &+ (-1,5) \cdot (-30)] + \frac{2}{3} \left(-\frac{40 \cdot 2^2}{8} [(-1,5) + (-0,5)] \right) = 226,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \end{aligned}$$

* Ординаты эпюр моментов вносятся в формулу со своими знаками (для рис. 4)

v_1, c – имеют знак «-».

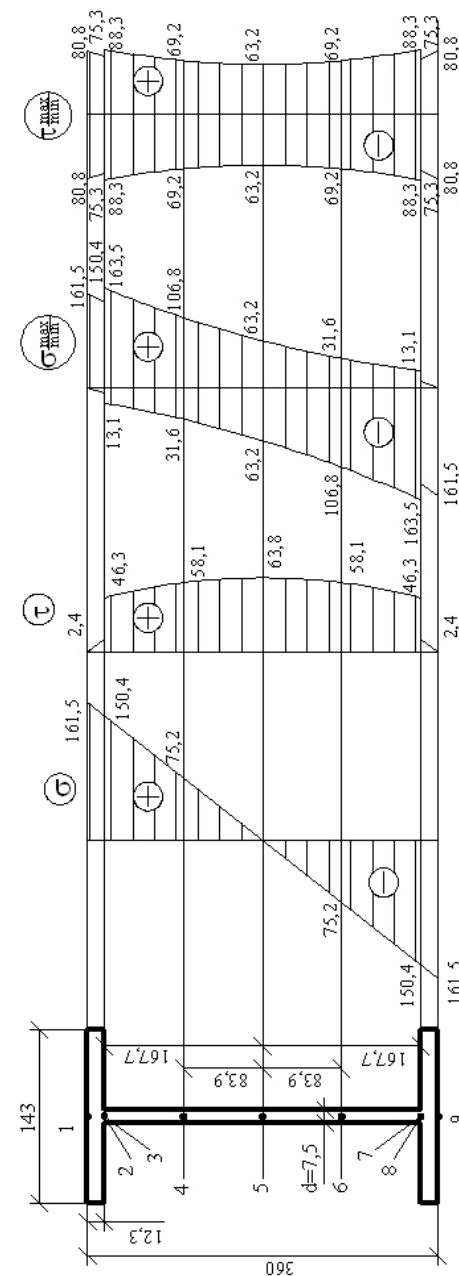


Рис. 2

4.2. Построение эпюры наибольших касательных напряжений

$$\tau_{i \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{4} + \tau_i^2}; \text{ МПа}$$

Точки 1,9 $\tau_{1,9 \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\frac{161,5^2}{4} + 0} = \pm 80,8$

Точки 2,8 $\tau_{2,8 \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\frac{150,4^2}{4} + 2,4^2} = \pm 75,3$

Точки 3,7 $\tau_{3,7 \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\frac{150,4^2}{4} + 46,3^2} = \pm 88,3$

Точки 4,6 $\tau_{4,6 \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\frac{75,2^2}{4} + 58,1^2} = \pm 69,2$

Точка 5 $\tau_{5 \frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{0 + 63,2^2} = \pm 63,2$

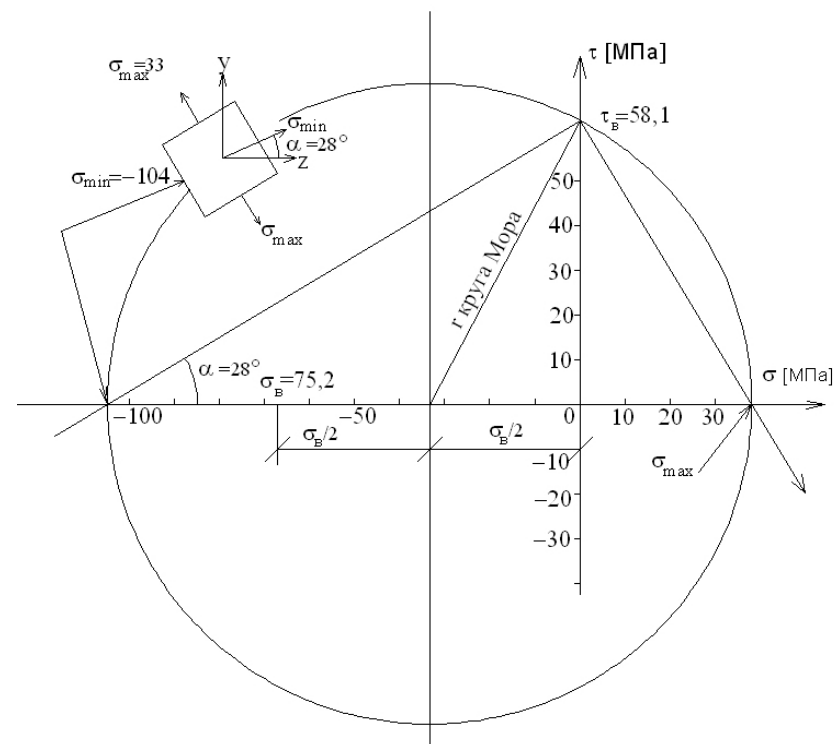


Рис. 3

5. Графическое определение величины и направления главных напряжений (круг Мора)

На рис. 3 показано решение для т.6 опасного сечения

6. Определение углов поворота и прогибов оси балки

Для решения по п.6 существуют методы: начальных параметров, непосредственного интегрирования, графоаналитический, Верещагина.

Для определения прогиба методом Верещагина, необходимо:

1. Приложить к балке единичную безразмерную силу в точке определения прогиба и в направлении, в котором требуется определить прогиб.
2. Построить эпюру моментов от единичной силы
3. «Перемножить» по правилу Верещагина эпюры моментов от внешней нагрузки M_p и единичной силы M_i по участкам, в пределах которых нет качественных изменений в обеих эпюрах.

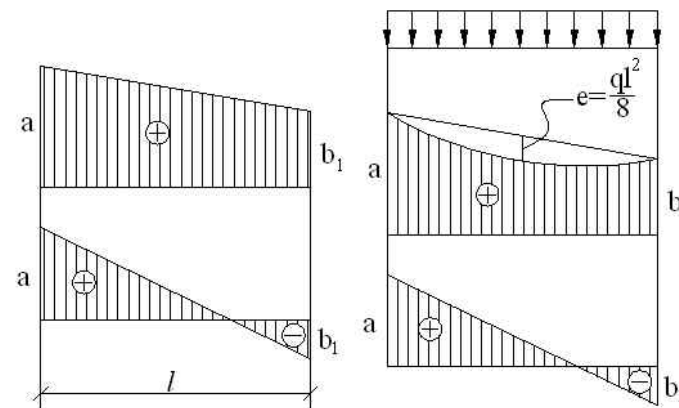


Рис. 4